

THE MATHEMATICAL MODEL OF SAWING BY BREAKDOWN AND SEGMENT METHOD FOR LOGS WITH ELLIPTIC FORM OF CROSS SECTION

The mathematical model of sawing by breakdown and segment method for logs with elliptic and circular forms of cross section is developed. Its reliability is confirmed by experimental results that's why it can be used for prediction of sawn timber volume recovery under industrial sawing.

Key words: mathematical model, log shape, elliptic paraboloid, sawing, breakdown and segment method, prediction of sawn timber volume recovery, sawn timber (board).

Introduction. The detail study of rational sawing methods of raw materials on sawn timber is realized in different directions but some features of these researches are investigated insufficiently. The number of studies concerning influence of real log shape on volume recovery of sawn timber is very limited. This direction is important because information about real log shape and consideration of log quality are the main prerequisites for increasing of sawn timber volume recovery [1].

It is known that log shape is considered as a certain geometric figure for performance of theoretical calculations for prediction of sawn timber volume recovery. The truncated paraboloid of revolution or the truncated cone belongs to the most extended and analyzed figures [2-4]. However, for the majority of sawed logs these geometric figures don't reflect the real log shape and some important characteristics (for example, ellipticity and curvature). Analysis of abovementioned geometric figures indicates the existence of substantial deviation of theoretical results and results of real sawing.

Using of laser scanning technology allows to describe the log as a surface connecting log cross sections approximated by spline or ellipse [5-7]. However, the practical application of this approach is confined because it evaluates shape of a single log only or defects influenced on your sawing pattern and avoids the solving of problems related to prediction of volume recovery for raw materials.

Other variants of log shape presentation for development of mathematical models of log sawing have been reported in the literature. For example, truncated paraboloid of revolution has been used for log description under breakdown and segment sawing [8, 9]. Truncated elliptic paraboloid of revolution has been served for creating of mathematical model of breakdown sawing. It is very effectively for elliptical logs as well as logs with circular cross sections [10]. The mathematical model described in this paper has considered not only the choice of a geometric figure reflecting the optimal shape of logs to provide the best pattern of log sawing but it also examines the influence of selected log shape on the increasing of sawn timber volume recovery. Thus, the close links between theoretical researches, development of new software based on mathematical models and optimization of rational use of wood raw materials will be provide the successful performance of industrial sawing

Development of mathematical model of sawing by breakdown and segment method for logs with elliptic form of cross sections. Log sawing by breakdown and segment method consists of two steps:

- log sawing into unedged boards and two segments;
- sawing of received segments into one-side edged boards.

The mathematical model of sawing for logs with elliptic cross section on unedged boards by breakdown method has been described earlier [10]. We try to improve it and

develop the mathematical model of log and segment sawing by breakdown and segment method. Log shape is presented as a truncated elliptic paraboloid of revolution and described by canonical equation [11]: $y^2/p + z^2/q = 2x$, (1)

where: p and q – parameters of elliptic paraboloid ($p > 0$, $q > 0$).

The width of unedged board face is determined by formulas [10]:

a) for orientation of kerf in parallel to larger axis of ellipse at the log sawing (1st pass)

$$b_n^1 = 2y = 2\sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{L} x' + R_1^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{r_2^2 - r_1^2} a^2}; \quad (2)$$

b) for orientation of kerf in parallel to smaller axis of ellipse at the log sawing (1st pass)

$$b_n^2 = 2z = 2\sqrt{\frac{r_2^2 - r_1^2}{L} x' + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{R_2^2 - R_1^2} a^2}. \quad (3)$$

The received symbols mean: R_1, R_2 – larger semiaxis of small and large ellipses (top and bottom butt-ends) respectively; r_1, r_2 – smaller semiaxis of small and large ellipses (top and bottom butt-ends) respectively; x' – variable coordinate of distance from top butt-end to cross section where the width of board is defined, a – distance from board face to log axis. Since unedged boards are sawed from central part of log (pythagorean zone) then their length is amounted as log length.

Determination of width of one-side edged board sawed from segment can be considered as a particular case of width determination for unedged board. The coordinate origin is transferred in the centre of upper cross section of log for determination of width for face of one-side edged board in any point from top butt-end of log (fig. 1).

Variable coordinates y and z remain constant, whereas coordinate x must be changed in accordance with a new system of coordinates. Variable coordinate let as x or $x = x' + x_1$ regard to previous central point Y_1XZ_1 or new central point YXZ respectively. The width for face of one-side edged board can be determined by following formulas:

a) for orientation of kerf in parallel to larger axis of ellipse at the segment sawing (2nd pass)

$$b_{o.o}^1 = \frac{b_n^1 - 2z}{2}; \quad (4)$$

b) for orientation of kerf in parallel to smaller axis of ellipse at the segment sawing (2nd pass)

$$b_{o.o}^2 = \frac{b_n^2 - 2y}{2}. \quad (5)$$

Inserting b_n from (2) and (3) into (4) and (5) respectively, this becomes:

a) for orientation of kerf in parallel to larger axis of ellipse at the segment sawing (2nd pass)

$$b_{o.o}^1 = \frac{2\sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{L} x' + R_1^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{r_2^2 - r_1^2} n^2} - 2z}{2}; \quad (6)$$

b) for orientation of kerf in parallel to smaller axis of ellipse at the segment sawing (2nd pass)

$$b_{o.o}^2 = \frac{2\sqrt{\frac{r_2^2 - r_1^2}{L} x' + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{R_2^2 - R_1^2} m^2} - 2y}{2}, \quad (7)$$

where: n – distance to cross section plane of elliptic paraboloid throughout axis z ; m – distance to cross section plane of elliptic paraboloid throughout axis y .

For calculation of sawing scheme, the distance of face board from log axis is defined as a and (or) e . Let that a – distance of board face from log axis in the 1st pass and e – distance of board face from log axis in the 2nd pass. Taking that $z = (a + pr)$,

$n = e$ (for orientation of kerf in parallel to larger axis of ellipse at the segment sawing), $y = (a + pr)$, and $m = e$ (for orientation of kerf in parallel to smaller axis of ellipse at the segment sawing), the formulas (6) and (7) can be written as:

a) for orientation of kerf in parallel to larger axis of ellipse at the segment sawing (2nd pass)

$$b_{o.o}^1 = \left(\sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{L} x' + R_1^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{r_2^2 - r_1^2} e^2} \right) - (a + pr); \quad (8)$$

b) for orientation of kerf in parallel to smaller axis of ellipse at the segment sawing (2nd pass)

$$b_{o.o}^2 = \left(\sqrt{\frac{r_2^2 - r_1^2}{L} x' + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{R_2^2 - R_1^2} e^2} \right) - (a + pr), \quad (9)$$

where pr – width of kerf in the first pass.

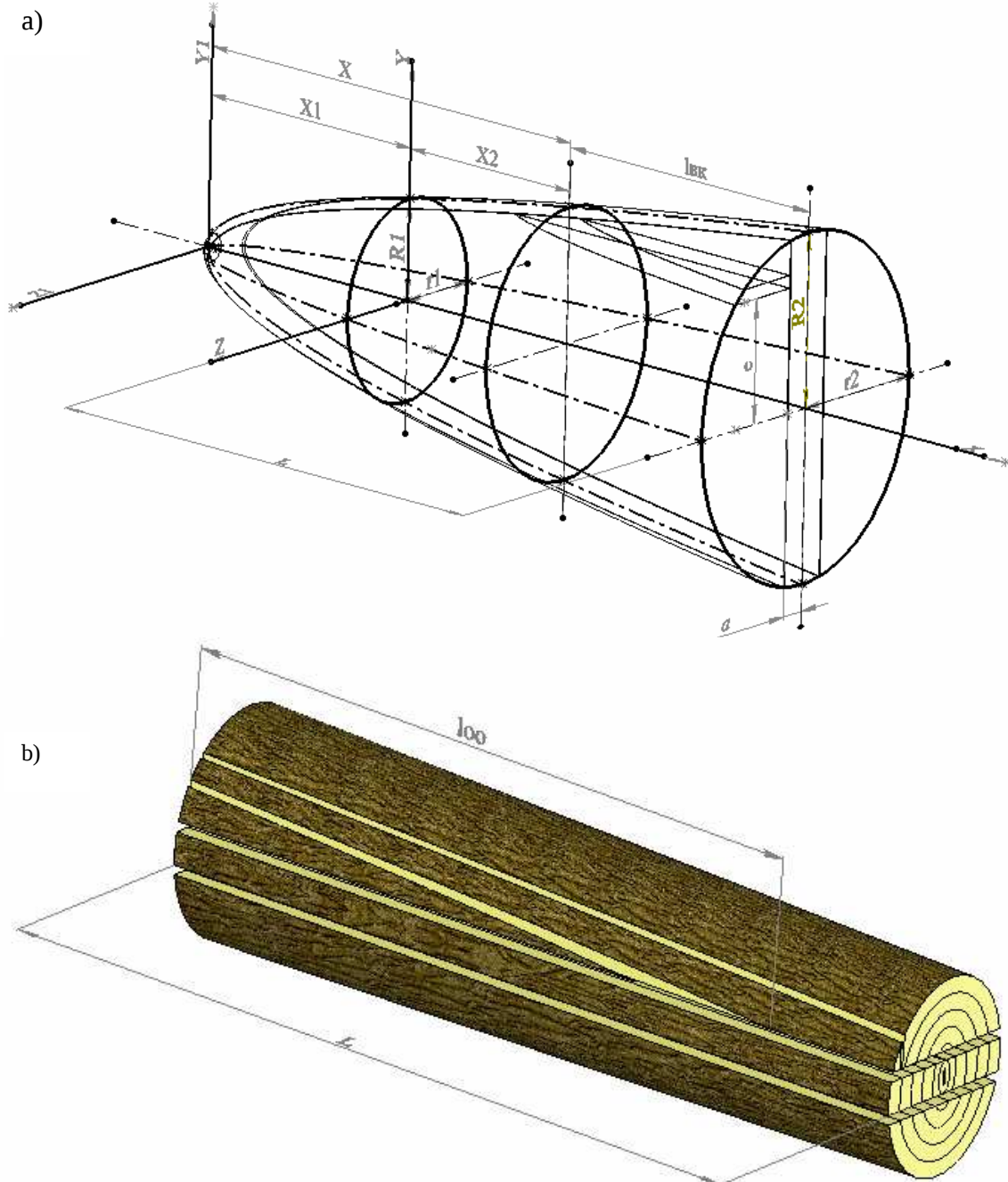


Fig. 1. The scheme for calculation of log sawing with elliptic form of cross section into unedged and one-side edged boards by breakdown or segment method:
a) graphical image; b) solid computer image.

The width of one-side edged board in top butt-end of log can be determined by formulas (8) or (9) for $x'=0$:

a) for orientation of kerf in parallel to larger axis of ellipse at the segment sawing (2nd pass)

$$b_{o.o.g}^1 = \left(\sqrt{R_1^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{r_2^2 - r_1^2} e^2} \right) - (a + pr); \quad (10)$$

б) for orientation of kerf in parallel to smaller axis of ellipse at the segment sawing (2nd pass)

$$b_{o.o.g}^2 = \left(\sqrt{r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{R_2^2 - R_1^2} e^2} \right) - (a + pr). \quad (11)$$

The width of one-side edged board in bottom butt-end of log can be determined by formulas (8) or (9) for $x'=L$:

a) for orientation of kerf in parallel to larger axis of ellipse at the segment sawing (2nd pass)

$$b_{o.o.gid3}^1 = \left(\sqrt{R_2^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{r_2^2 - r_1^2} e^2} \right) - (a + pr); \quad (12)$$

б) for orientation of kerf in parallel to smaller axis of ellipse at the segment sawing (2nd pass)

$$b_{o.o.gid3}^2 = \left(\sqrt{r_2^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{R_2^2 - R_1^2} e^2} \right) - (a + pr). \quad (13)$$

The length of one-side edged board can be determined from formulas (8) or (9):

a) for orientation of kerf in parallel to larger axis of ellipse at the segment sawing (2nd pass),

when $e \leq \sqrt{\frac{(r_1 R_1)^2 - (R_1(a + pr))^2}{r_1^2}}$ – length of one-side edged board $l_{o.o}$ (without shortening along the

full length) is equal of log length L , or when the $e > \sqrt{\frac{(r_1 R_1)^2 - (R_1(a + pr))^2}{r_1^2}}$ – at a some distance x'

from top butt-end of log, the length of one-side edged board $l_{o.o}$ is smaller than log length whereas the width of the external face board in the top butt-end equals zero;

b) for orientation of kerf in parallel to smaller axis of ellipse at the segment sawing (2nd pass) at

the $e \leq \sqrt{\frac{(r_1 R_1)^2 - (r_1(a + pr))^2}{R_1^2}}$ – length of one-side edged board $l_{o.o}$ (without shortening along the full

length) is equal of log length L , or at the $e > \sqrt{\frac{(r_1 R_1)^2 - (r_1(a + pr))^2}{R_1^2}}$ – at a some distance x' from top

butt-end of log, the length of one-side edged board $l_{o.o}$ is smaller than log length whereas the width of the external board face in the top butt-end equals zero.

Let that $x' = L - l_{o.o}$ (when the width of board $b_{o.o}$ is equal zero and inserting it in formulas (8) and (9), then becomes:

a) for orientation of kerf in parallel to larger axis of ellipse at the segment sawing (2nd pass)

$$\left(\sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{L} (L - l_{o.o}^1) + R_1^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{r_2^2 - r_1^2} e^2} \right) - (a + pr) = 0 \Rightarrow l_{o.o}^1 = L \left(\frac{R_2^2 - (a + pr)^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{e^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) \quad (14)$$

b) for orientation of kerf in parallel to smaller axis of ellipse at the segment sawing (2nd pass)

$$\left(\sqrt{\frac{r_2^2 - r_1^2}{L} (L - l_{o.o}^2) + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{R_2^2 - R_1^2} e^2} \right) - (a + pr) = 0 \Rightarrow l_{o.o}^2 = L \left(\frac{r_2^2 - (a + pr)^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{e^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \quad (15)$$

The width for external face of one-side edged board in the top butt-end must be equal or greater than blank width for production of blanks from one-side edged board. If

this condition is disturbed the board must be cut off. The length of shortening one-side edged board is determined as follows:

a) for orientation of kerf in parallel to larger axis of ellipse at the segment sawing (2nd pass)

$$b_{\min}^1 = \left(\sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{L} x' + R_1^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{r_2^2 - r_1^2} e^2} \right) - (a + pr) \Rightarrow x' = \frac{L \cdot \left((b_{\min}^1 + (a + pr))^2 - R_1^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{r_2^2 - r_1^2} e^2 \right)}{R_2^2 - R_1^2}$$

When the value of $x' = L - l_{\text{BK.O.O}}^1$, then

$$l_{\text{BK.O.O}}^1 = \frac{L \cdot \left(R_2^2 - (b_{\min}^1 + (a + pr))^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{r_2^2 - r_1^2} e^2 \right)}{R_2^2 - R_1^2} \quad (16)$$

or:

$$l_{\text{BK.O.O}}^1 = L \cdot \left(\frac{R_2^2 - (b_{\min}^1 + (a + pr))^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{e^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) \quad (16a)$$

b) for orientation of kerf in parallel to smaller axis of ellipse at the segment sawing (2nd pass)

$$b_{\min}^2 = \left(\sqrt{\frac{r_2^2 - r_1^2}{L} x' + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{R_2^2 - R_1^2} e^2} \right) - (a + pr) \Rightarrow x' = \frac{L \cdot \left((b_{\min}^2 + (a + pr))^2 - r_1^2 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{R_2^2 - R_1^2} e^2 \right)}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Let that $x' = L - l_{\text{BK.O.O}}^2$, then

$$l_{\text{BK.O.O}}^2 = \frac{L \cdot \left(r_2^2 - (b_{\min}^2 + (a + pr))^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{R_2^2 - R_1^2} e^2 \right)}{r_2^2 - r_1^2} \quad (17)$$

or:

$$l_{\text{BK.O.O}}^2 = L \cdot \left(\frac{r_2^2 - (b_{\min}^2 + (a + pr))^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{e^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \quad (17a)$$

The maximal coverage of segment by sawing scheme (the maximal distance between extreme kerfs) must be calculated for decreasing of waste in slab. It is provide the production of extreme side boards with minimal acceptable size concerning specification and minimal waste in slab. The determination of maximal coverage of log diameter by sawing scheme in the 1st pass (for sawing of unedged boards and two segments) can't perform because the length of unedged board sawed at the 1st pass is equal of log length and the width in the top butt-end is greater than the minimal possible width of blanks. So we determinate the maximal coverage of segment by sawing scheme in the 2st pass only (for segment sawing).

For determination of width of one-side edged board is used the formulas (8) and (9). If the received one-side edged boards have minimal acceptable width and length as well as $x' = L - l_{\min}$ and $b_{\text{o.o}} = b_{\min}$, the formulas (8) and (9) are given by:

a) for orientation of kerf in parallel to larger axis of ellipse at the segment sawing (2nd pass)

$$b_{\min}^1 = \left(\sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{L} (L - l_{\min}^1) + R_1^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{r_2^2 - r_1^2} e^2} \right) - (a + pr) \Rightarrow$$

$$E_{гран}^1 = 2e = 2\sqrt{\frac{r_2^2 - r_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(R_2^2 - (R_2^2 - R_1^2) \frac{l_{min}^1}{L} - (a + pr)^2 - 2b_{min}^1 (a + pr) - (b_{min}^1)^2 \right)}; \quad (18)$$

b) for orientation of kerf in parallel to smaller axis of ellipse at the segment sawing (2nd pass)

$$b_{min}^2 = \left(\sqrt{\frac{r_2^2 - r_1^2}{L} (L - l_{min}^2) + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{R_2^2 - R_1^2} e^2} \right) - (a + pr) \Rightarrow$$

$$E_{гран}^2 = 2e = 2\sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(r_2^2 - (r_2^2 - r_1^2) \frac{l_{min}^2}{L} - (a + pr)^2 - 2b_{min}^2 (a + pr) - (b_{min}^2)^2 \right)}. \quad (19)$$

For more precise of length determination of shortening one-side edged board and maximal coverage of segment by sawing scheme is must be taken into account shrinkage of wood throughout width in respective design formulas.

The theoretical calculations and their comparison with results of experimental researches are indicate that developed mathematical model of sawing by breakdown and segment method for logs presented as truncated elliptic paraboloid can be used for prediction of sawn timber volume recovery in industrial conditions.

Conclusions:

1. The mathematical model of sawing by breakdown and segment method for logs with elliptic cross section is developed. The theoretical results are confirmed by experimental researches. Thus this mathematical model can be used in industrial sawing.

2. It can be used also for prediction of sawn timber volume recovery for logs with circular form of cross section which sawed by breakdown and segment sawing.

References

1. **Маєвський В.О., Максимів В.М.** Основні напрями досліджень у технології лісопиляння // Наук. вісник УкрДЛТУ: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: УкрДЛТУ. – 2004, вип. 4.1. – С. 72-77.
2. **Аксенов П.П.** Теоретические основы раскря пиловочного сырья. – М.: Лесн. пром-сть. – 1960. – 216 с.
3. **Носовський Т.А., Мацюк Р.І., Маслій В.В.** Технологія лісопильно-деревообробних виробництв. – К.: НМКВО. – 1993. – 195 с.
4. **Рыкунин С.Н.** Технология лесопильно-деревообрабатывающих производств: Учебн. пособ. – М.: Московский гос. ун-т Леса. – 2007. – 225с.
5. **Thomas L.** Analysis of 3-D hardwood log surface data using robust estimation and filtering methods, 2002 // <http://www.csgrad.cs.vt.edu/~lithomas/robustestimation>.
6. **Thomas L.** 3D log data unrolling and primary detection of hardwood log surface defects. – 2001 // <http://www.csgrad.cs.vt.edu/~lithomas/primarystudy>.
7. **Яковлев М.К.** Совершенствование учёта и раскря круглых лесоматериалов на основе метода индивидуальных моделей: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.21.05 / Белор. гос. технол. ун-т. – Мінськ. – 1995. – 19 с.
8. **Маєвський В.О., Мацюк Р.І., Маслій В.В.** Теоретичні основи розкряу колод розвальню-сегментним способом. // Наук. вісник УкрДЛТУ: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: УкрДЛТУ. – 1998, вип. 8. – С. 116–121.
9. **Батин Н.А., Уласовец В.Г.** Теоретические основы раскря сегмента на обрезные пиломатериалы // Механ. технология древесины: Республ. межвед. сб. – Минск: Выш. шк. – 1983, вып. 13, – С. 3–7.
10. **Маєвський В.О., Максимів В.М., Миськів Є.М.** Математична модель розпилювання розвальнюним способом колод з формою поперечного перетину у вигляді еліпса. // Ліс. госп-во, ліс., папер. і деревооб. пром-сть: Міжвід. наук.-техн. зб. – Львів: НЛТУ України. – 2008, вип. 34. – С. 123–130.
11. **Александров П.С.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник. – М.: Наука. – 1979. – 532 с.

Математична модель розпилювання розвальню-сегментним способом колод з формою поперечного перетину у вигляді еліпса

Наведено результати дослідження можливості теоретичного прогнозування виходу пилопродукції за розпилювання розвальню-сегментним способом колод з формою поперечного перетину у вигляді еліпса. Незважаючи на проведені ґрунтовні дослідження проблеми раціонального розпилювання пиловочної сировини на пилопродукцію, існує ряд напрямів досліджень, які вивчені недостатньо. Один із них – дослідження впливу реальної форми колоди на об'ємний вихід пилопродукції. Оскільки врахування інформації про реальну форму колоди нарівні з врахуванням її якості є основною передумовою ймовірного збільшення виходу пилопродукції, то безперечно цей напрямок досліджень – актуальний. З теорії технології лісопиляння відомо, що для теоретичних розрахунків з метою прогнозування виходу пилопродукції, форму колоди у багатьох дослідженнях приймають за геометричну фігуру обертання, зокрема – зрізаний параболоїд обертання або зрізаний конус. Однак таке припущення є малопридатним, оскільки ці геометричні фігури не відображають реальної форми колоди, наприклад еліптичності та кривизни, наявних у великій частини колод, які поступають на розпилювання. Це призводить до значного відхилення результатів теоретичних розрахунків від результатів реального розпилювання, і як наслідок, неточного і малоприйняттого результату прогнозування виходу пилопродукції. Для вирішення проблеми ефективного прогнозування виходу пилопродукції форму колоди, як один із варіантів, прийнято за зрізаний еліптичний параболоїд обертання, який окрім форми поперечного перетину колоди у вигляді еліпса, враховує також форму поперечного перетину колоди у вигляді круга. Розроблено математичну модель розпилювання розвальню-сегментним способом колод з формою поперечного перетину у вигляді еліпса. Розпилювання колод розвальню-сегментним способом розглянуто як двоетапну задачу. На першому етапі – розпилювання колод розвальню-сегментним способом на необрізні пиломатеріали та два сегменти, а на другому – розпилювання сегментів на одnobічно-обрізні пиломатеріали. Математична модель розпилювання розвальню-сегментним способом на необрізні пиломатеріали колод з формою поперечного перетину у вигляді еліпса розроблена у попередній роботі [10]. Тому наведено тільки основні положення, які стосуються даного питання і використанні для розроблення заключної частини математичної моделі розпилювання колод розвальню-сегментним способом – розпилювання сегментів на одnobічно-обрізні пиломатеріали. Розроблено другу частину математичної моделі розпилювання колод розвальню-сегментним способом – розпилювання сегментів на одnobічно-обрізні пиломатеріали, яка передбачає визначення: ширини та довжини одnobічно-обрізного пиломатеріалу, довжини вкороченого одnobічно-обрізного пиломатеріалу, а також граничного охоплення схемою розпилювання сегмента для умови орієнтації пропилів паралельно більшій і меншій вісі еліпса під час розпилювання сегмента. Розроблена математична модель, як частковий варіант, враховує розпилювання розвальню-сегментним способом колод з формою поперечного перетину у вигляді круга. Достовірність розробленої математичної моделі підтверджено результатами експериментальних досліджень, тому її доцільно використовувати для прогнозування виходу пилопродукції у виробничих умовах.

Ключові слова: математична модель, форма колоди, еліптичний параболоїд, розпилювання, розвальню-сегментним спосіб, прогнозування об'ємного виходу, пиломатеріал (дошка).